

学校编号: 10384

分类号 _____ 密级 _____

学 号: 19120081152725

UDC _____



硕 士 学 位 论 文

**Kanenobu 纽结及其变体的 Jones 多项
式的极端项系数**

**Determining extreme coefficients of Jones
polynomial of Kanenobu knots and their
variants**

张 文 艺

指导教师姓名: 金贤安 副教授

专 业 名 称: 基 础 数 学

论文提交日期: 2011 年 3 月

论文答辩日期: 2011 年 5 月

学位授予日期: 2011 年 6 月

答辩委员会主席: _____

评 阅 人: _____

2011 年 5 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的
研究成果。本人在论文写作中参考的其它个人或集体的研
究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担
由此论文而产生的权利和责任。

责任人（签名）：

年 月 日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

- 1、保密 (), 在 年解密后适用本授权书。
- 2、不保密 (), 适用本授权书。

(请在以上相应括号内打“√”)

作者签名: _____ 日期: _____ 年 ____ 月 ____ 日

导师签名: _____ 日期: _____ 年 月 日

目 录

中文摘要	i
英文摘要	ii
第 1 章 引言	1
1.1 链环和形变	1
1.2 <i>Kaufman</i> 状态模型	2
1.3 已知结果	6
第 2 章 准备工作	11
2.1 独立集与交叉图	11
2.2 非交错框架	14
第 3 章 <i>Kanenobu</i> 纽结	19
3.1 交叉图参数 f	19
3.2 极端状态的状态圈数	27
3.1 极端项系数	29
3.2 几点注解	31
第 4 章 <i>Kanenobu</i> 纽结的变体	33
4.1 第一类变体	33
4.2 第二类变体	40
4.3 一点注解	45
参考文献	46
致 谢	48

Contents

Abstract(in Chinese)	i
Abstract(in English)	ii
Chapter 1 Introduction	1
1.1 Links and deformations.....	1
1.2 <i>Kauffman's</i> State Model.....	2
1.3 Known Results	6
Chapter 2 Preparations	11
2.1 Independent Sets and Intersection Graphs	11
2.2 Non-alternating Skeleton.....	14
Chapter 3 <i>Kanenobu</i> Knot	19
3.1 Parameter f for Intersection Graphs.....	19
3.2 The Number of Extreme State Circles	27
3.1 The Extreme Coefficients.....	29
3.2 Remarks	31
Chapter 4 The Variants of <i>Kanenobu</i> Knots	33
4.1 The First Type.....	33
4.2 The Second Type.....	40
4.3 Remarks	45
References	46
Acknowledgement	48

摘要

纽结理论是研究链环在形变下保持不变的特性的学科。寻找既有强的分辨不同纽结的能力,又易于计算的同痕不变量是纽结理论的一个主要课题。1984年, *Jones* 从他的关于算子代数的定理中引申出纽结与链环的一个多项式不变量,即我们所说的 *Jones* 多项式。1987年, *Kauffman* 提出了用尖括号多项式来构造 *Jones* 多项式。一直以来,许多学者致力于纽结的交叉数、*Jones* 多项式的跨度和极端项系数的研究。交错链环和 adequate 链环该方面的工作见文献 [3][4]。一些纽结和链环类,如排叉链环、卫星结、Whitehead doubles 等方面的工作见 [4][5][10]。在 [6] 中,作者引入非交错框架和交叉图等概念来确定非交错链环的 *Jones* 多项式的极端项系数。进一步的工作见文献 [9][10][12]。

本论文主要用文 [6] 的方法来确定 *Kanenobu* 纽结 [11] 及其两种变体的 *Jones* 多项式的极端项系数。论文分为四章如下:在第一章,我们首先介绍纽结和链环的一些基础知识,然后介绍 *Jones* 多项式的 *Kauffman* 括号状态模型,最后我们给出一些已有的 *Jones* 多项式极端项系数的研究成果。在第二章,我们做一些预备的工作,引入独立集和非交错框架的概念,这是我们研究所使用的工具。在第三章,我们对 *Kanenobu* 纽结分情况进行了讨论,以求出各种情况下的 *Kauffman* 括号多项式的极端项系数的值,然后我们加入拧数的影响,以得到其 *Jones* 多项式的极端项系数。在第四章,我们确定了 *Kanenobu* 纽结的两类变体的 *Jones* 多项式的极端项系数。

关键词: *Jones* 多项式; 极端项系数; *Kanenobu* 纽结; 变体; 非交错框架; 交叉图; 独立集

Abstract

Knot theory is a discipline of studying the unchanged characteristics of knots and links under deformations. An important topic of this field is to search an invariant that is not only powerful to distinguish different links, but also easy to calculate. In 1984, *Jones* discovered a new polynomial invariant. This polynomial which is named *Jones polynomial* came out of his studying of operator algebras. In 1987, *Kauffman* built a state model for it using his bracket polynomial. Since then, many scholars were devoted to the study of crossing number of knots, the span and extreme coefficients of Jones polynomial, see [3][4] for works of alternating links and adequate links. In this aspect, some well-known classes of knots and links, for instance, pretzel links, satellite knots and Whitehead doubles, were also studied, see [4][5][10]. In [6], *Bae* and *Morton* introduced non-alternating skeletons and intersection graphs to determine the extreme coefficients of Jones polynomial of non-alternating links. For further works, see [9][10][12].

In this dissertation we shall use the method in [6] to compute the extreme coefficients of Jones polynomial of the *Kanenobu* knot and their two types of variants. This dissertation includes four chapters altogether. In the first chapter, we present some definitions firstly, then give the *Kauffman's* model of Jones polynomial, and finally some known results on extreme coefficients of Jones polynomial of links. In the second chapter, we make preparations for the subsequent chapters. We present the constuctions of non-alternating skeletons and intersection graphs elaborately. In the third and fourth chapters, we determine the extreme coefficients of *Jones* polynomials of *Kanenobu* knots and their two types of variants, respectively.

Key words: Jones polynomial ; extreme coefficients ; *Kanenobu* knots ; variants ; non-alternating skeletons ; intersection graphs ; independent sets

厦门大学博硕士论文摘要库

第 1 章 引言

1984 年, *Jones* 从他的关于算子代数的定理中引申出纽结与链环的一个多项式不变量, 即 *Jones* 多项式 [1]。1987 年, *Kauffman* 提出了用尖括号多项式来构造 *Jones* 多项式 [2]。此后, 许多学者致力于纽结和链环的交叉数、*Jones* 多项式的跨度和极端项系数的研究 [3][4][5][6]。在 [3] 中, *Murasugi* 证明了交错链环的 *Jones* 多项式的跨度与其交叉数是相等的, 并且证明了 *Tait* 猜想: 交错链环的一个 *reduced* 交错投影图的交叉点数即为该链环的交叉数。在 [6] 中, 作者引入非交错框架和交叉图等概念来确定非交错链环的 *Jones* 多项式的极端项系数。本文将用这种方法来确定一类纽结的 *Jones* 多项式的极端项系数。在此之前, 我们先介绍一些基础知识。

1.1 链环和形换

本节所介绍内容, 主要来自于姜伯驹院士所著的《绳圈的数学》一书 [7]。

定义 1.1.1 纽结是三维空间中的简单闭曲线。简单闭曲线, 意思是连通的, 封闭的, 不自交的曲线。由有限多条互不相交的简单闭曲线构成的空间图形, 称为链环, 组成链环的每一条简单闭曲线称为链环的一个分支。我们把纽结看成是只有一个分支的链环。

定义 1.1.2 每个链环, 选取适当的投影方向, 总可以使它在平面上的投影的自交点都只是二重交叉点; 以线的虚实表现交叉的情况, 就得到纽结的投影图。

纽结与链环可以在空间中自由地连续变形, 但是不许剪断, 不许粘合。如果一个纽结 (或链环) 可以经过这种绳圈移位变形变成另一个, 我们就说这两个纽结 (链环) 是等价的, 或同痕的。德国数学家 *Reidemeister* 在 20 世纪 30 年代指出 [8], 纽结与链环的同痕本质上是由纽结 (链环) 投影图

的三种基本变换（通常称为初等变换）来刻划的，我们分别称它们为 $R1$ ， $R2$ ， $R3$ （如图 1-1 所示）。

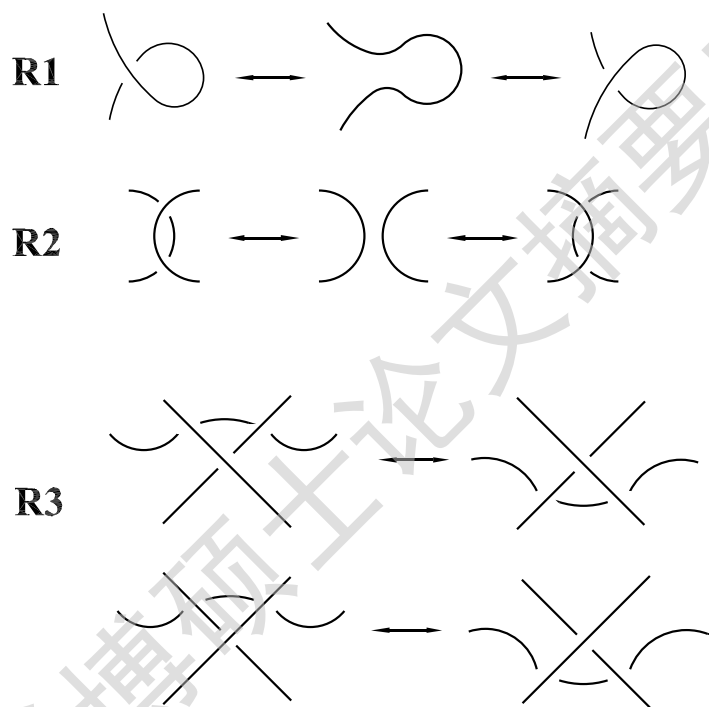


图 1-1. Reidemeister 初等变换

1.2 *Kaufman* 状态模型

自从 *Jones* 多项式出现以后，人们开始尝试用初等的方法进行讲解，本节我们介绍 *Kaufman* 的括号状态模型 [2]。在本文中，除了另有说明外，总假设 L 为定向的链环， D' 为 L 的定向投影图（link diagram）， D 为与 D' 相同但不考虑定向的投影图。

给定一个无向投影图，用 A ， B 来分别标识投影图每个交叉点附近的四个区域，上线逆时针方向旋转至下线扫过的两个区域为 A - 区域，其余两个为 B - 区域，如图 2 左所示。图 1-2 右边，我们标出了方结 (reef knot or square knot) 的投影图在每一个交叉点附近的 A - 区域和 B - 区域。

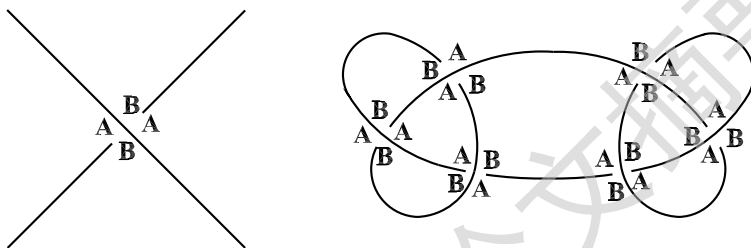
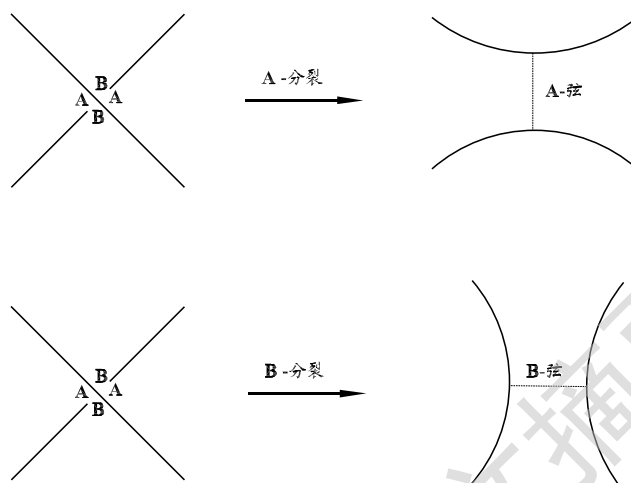


图 1-2. A - 区域和 B - 区域

在每个交叉点处都可以进行两个可能的局部分裂，分别称为 A - 分裂 (图 1-3 上) 和 B - 分裂 (图 1-3 下)。在此同时，我们加入一条虚弦 (它的端点分别处于局部分裂而得的两条弧线上) 来说明在原图中该点附近 4 个区域的情况。如果将某条虚弦是因为原图的交叉点做了 A - 分裂而加入的，则该弦称为 A - 弦，反之称为 B - 弦 (如图 1-3)。

设无向投影图 D 的交叉点为 c_1 、 c_2 、 \dots 、 c_n ， D 的一个状态是指函数 $s: \{c_i: 1 \leq i \leq n\} \rightarrow \{A, B\}$ ，即指定每个交叉处的分裂方式。 D 经过状态 s 作用后成为一些不交圈，称它们为 s 的“状态圈”，这些圈的个数记为 $|s|$ 。我们用 $a(s)$ 和 $b(s)$ 分别表示在状态 s 下做 A - 或 B - 分裂

图 1-3. A 、 B -分裂与 A 、 B -弦

的交叉点的个数。用 s_A 和 s_B 表示全 A -分裂或全 B -分裂这两种极端状态。 D 的所有状态的集合称为状态集，用 S 来表示。显然 n 个交叉点的投影图有 2^n 个状态。

Kauffman 尖括号多项式的定义如下：

$$\langle D \rangle = \sum_{(s \in S)} \varphi_s$$

其中， φ_s 是一个 *Laurent* 多项式： $\varphi_s \triangleq A^{a(s)-b(s)}(-A^2 - A^{-2})^{|s|-1}$

定义 1.2.1 在定向投影图 D' 的每个交叉点处，用图 1-4 所示的原则分别标以“+1”或“-1”，我们把所有的这些“+1”或“-1”的和称为该投影图的拧数，记为 $w(D')$ 。

定义：

$$F_L(A) = (-A^3)^{-w(D')} \langle D \rangle .$$



图 1-4. 定向投影图的拧数

可以证明, $F_L(A)$ 在 *Reidemeister* 变换下是不变的 [2], 且有 $V_L(t) = F_L(t^{\frac{1}{4}})$ 这里 $V_L(t)$ 是 L 的 Jones 多项式 [1]。

定义 1.2.2 Laurent 多项式 $\varphi_{s_A} \triangleq A^n(-A^2 - A^{-2})^{|s_A|-1}$ 的首项为 $(-1)^{|s_A|-1}A^{2|s_A|+n-2}$, 记作 $\max \varphi_{s_A}$, $\varphi_{s_B} \triangleq A^{-n}(-A^2 - A^{-2})^{|s_B|-1}$ 的末项为 $(-1)^{|s_B|-1}A^{-2|s_B|-n+2}$, 记作 $\min \varphi_{s_B}$, 我们把 $\langle D \rangle$ 中度与 $\max \varphi_{s_A}$ 的度相同的项 (即度为 $2|s_A| + n - 2$ 的项) 称为投影图 D 的 *Kauffman* 括号多项式的极端大项, 它的系数记为 a_{s_A} ; 把 $\langle D \rangle$ 中度与 $\min \varphi_{s_B}$ 的度相同的项称为投影图 D 的 *Kauffman* 括号多项式的极端小项, 它的系数记为 b_{s_B} 。注意 a_{s_A} 、 b_{s_B} 都有可能为零。相应地, 将 $(-1)^{-w(D')}(a_{s_A})$ 称为链环 L 的 *Jones* 多项式的极端大项的系数, 记为 a'_{s_A} , 将 $(-1)^{-w(D')}(b_{s_B})$ 称为链环 L 的 *Jones* 多项式的极端小项的系数, 记为 b'_{s_B} , 统称为极端项系数。

注意到 $w(D')$ 很容易可以求得, 那么接下来, 我们关心的将主要是怎么去求 $\langle D \rangle$ 的极端项系数。在文 [14] 中, Jin 和 Zhang 给出了 *Jones* 多项式的有向状态模型, 将拧数添加到了括号多项式中。应该指出的是, a'_{s_A} 和 b'_{s_B}

并不是链环的不变量, 即它是依赖于投影图的, 对于这点我们将在下一章中给出解释。

再, L 的极端大项的度大于等于 $V_L(t)$ 的首项的度, L 的极端小项的度小于等于 $V_L(t)$ 的末项的度。因此只有极端项系数不为零时, 它等于 *Jones* 多项式的首末项系数, 这时它是该投影图所表示的链环的不变量。

1.3 已知结果

定义 1.3.1 链环 L 的 *Jones* 多项式 $V_L(t)$ 的首项的度与末项的度之间的差, 称为 *Jones* 多项式的跨度, 记作 $\text{span}V_L$ 。

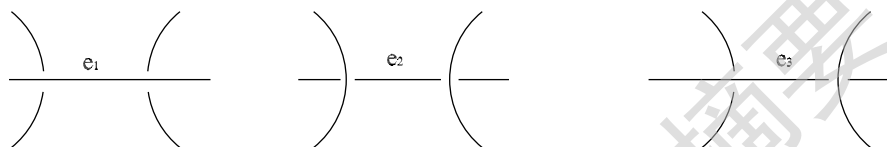
定义 1.3.2 链环 L 的无向投影图 D 的交叉点的个数记为 $c(D)$, $c(L) = \min(D_i)$ (D_i 取遍 L 的所有投影图) 称为 L 的交叉数。

人们起初感兴趣于研究链环的 *Jones* 多项式的跨度和他们的交叉数之间的关系, *Kauffman* [2] 和 *Murasugi* [3] 证明了 $\text{span}V_L \leq c(L)$, 在 [3] 中, *Murasugi* 还证明了当 L 是交错链环时, $\text{span}V_L = c(L)$ 。*Lickorish* 和 *Thistlethwaite* 给出了 *adequate* 链环 [4] 和半交错链环 [9] 的定义。

定义 1.3.3 投影图的一条边称为交错边, 若这条边在两个端点处一个是上面穿过的, 一个是从下面穿过的。若两端都是从下面穿过的则称为“ $-$ 边”, 若都从上面穿过的则称为“ $+$ 边”, 这两类边统称为非交错边。(如图 1-5 所示)

定义 1.3.4 当我们遍历链环 L 的一个投影图 D 的每一个分支时, 若它的每一条边都是交错边, 则称 D 为交错投影图。具有交错投影图的链环称为交错链环。

Lickorish 和 *Thistlethwaite* 给出了 *adequate* 链环 [4] 的定义。

图 1-5. e_1 为 + 边、 e_2 为 - 边、 e_3 为交错边

定义 1.3.5 投影图 D 称为 $+adequate$ 的, 当 $|s_A| > |s_i|$, $\forall s_i \in S$ 且 $a_{s_i} - b_{s_i} = n - 2$; 称为 $-adequate$ 的, 当 $|s_B| > |s_j|$, $\forall s_j \in S$ 且 $a_{s_j} - b_{s_j} = 2 - n$;

以上对 $adequate$ 投影图的定义等价于: 当对 D 进行全 A - 分裂的时候, 每个交叉点处分裂而来的两条弧线分属于不同的状态圈的, 且对全 B - 分裂也有同样的结果。

根据定义, 交错链环显然是 $adequate$ 链环, 但 $adequate$ 链环不一定是交错链环。

定义 1.3.6 链环投影图 D 中的一个 $tangle$ 是指一个与投影图有 4 个交点的圆形区域 (如图 1-6 所示), 这 4 个交点称为 $tangle$ 的端点。

每个 $tangle$ 具有如图 1-7 所示的两种闭合成为链环的方式, 分别称为分母闭合和分子闭合。一个 $tangle$ 称为强交错的, 若它通过两种闭合方式所得的投影图都是交错投影图。两个 $tangle$ 投影图可以通过 4 个端点的两两连接而得到一个新的 $tangle$, 称为 $tangle$ 的联合 (如图 1-8 所示)。

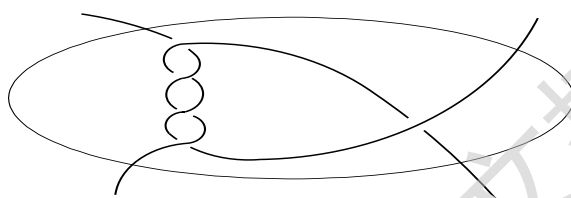
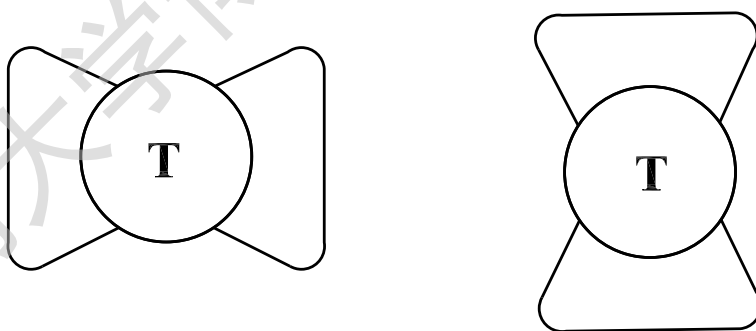


图 1-6. 一个 tangle 的例子

图 1-7. Tangle T 的分母 (左) 和分子 (右) 闭合方式

Degree papers are in the "[Xiamen University Electronic Theses and Dissertations Database](#)". Full texts are available in the following ways:

1. If your library is a CALIS member libraries, please log on <http://etd.calis.edu.cn/> and submit requests online, or consult the interlibrary loan department in your library.
2. For users of non-CALIS member libraries, please mail to etd@xmu.edu.cn for delivery details.

厦门大学博硕士论文摘要库